图上的匹配、覆盖、流、割

张腾

设二部图 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$，其中 $\mathcal{V}=\mathcal{V}_1\uplus\mathcal{V}_2$，$\mathcal{E}\subseteq\mathcal{V}_1\times\mathcal{V}_2$，$\delta(v)$ 为与点 v 相连的边的集合。

若边集 $\mathcal{M}$ 中任意两条边没有公共顶点，则称 $\mathcal{M}$ 为匹配 (matching)。现对任意边 e 赋予一个非负整数 x_e，则匹配满足对任意点 v 有 $\sum_{e\in\delta(v)} x_e \le 1$。

若点集 $\mathcal{C}$ 使得每条边都至少有一个顶点属于 $\mathcal{C}$，则称 $\mathcal{C}$ 为覆盖 (cover)。现对任意点 v 赋予一个非负整数 z_v，则覆盖满足对任意边 (u,v) 有 $z_u+z_v\ge 1$。

设 $\mathbf{A}=[a_{v,e}]\in\{0,1\}^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{E}|}$ 是二部图 $\mathcal{G}$ 对应的关联矩阵，即 $a_{v,e}=1_{e\in\delta(v)}$，则

$$\forall v\in\mathcal{V},\ \sum_{e\in\delta(v)} x_e\le 1 \Longleftrightarrow \mathbf{A}\boldsymbol{x}\le\mathbf{1}$$
$$\forall (u,v)\in\mathcal{E},\ z_u+z_v\ge 1 \Longleftrightarrow \mathbf{A}^\top\boldsymbol{z}\ge\mathbf{1}$$

1 最大匹配

所有匹配中势最大的称为最大匹配，求解最大匹配可形式化成

$$\max_{\boldsymbol{x}}\ \{\mathbf{1}^\top\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_+^{|\mathcal{E}|},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x}\le\mathbf{1}\} \tag{1}$$

由于 $\boldsymbol{x}$ 是整数向量，这是一个整数规划，难以直接求解，将离散集合 $\mathbb{Z}_+^{|\mathcal{E}|}$ 放松成连续集合 $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{E}|}$，可得线性规划

$$\max_{\boldsymbol{x}}\ \{\mathbf{1}^\top\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}\ge\mathbf{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x}\le\mathbf{1}\} \tag{2}$$

注意 $\{\boldsymbol{x}\ge\mathbf{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x}\le\mathbf{1}\}\Longleftrightarrow[\mathbf{A};-\mathbf{I}]\boldsymbol{x}\le[\mathbf{1};\mathbf{0}]$，由于二部图的关联矩阵必然是全幺模矩阵，故 $[\mathbf{A};-\mathbf{I}]$ 也是全幺模矩阵，又 $[\mathbf{1};\mathbf{0}]$ 是整数向量，故凸多面体 $\{\boldsymbol{x}\ge\mathbf{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x}\le\mathbf{1}\}$ 的极点是整数向量。由于线性规划必然在极点处取最优，因此线性规划 (2) 的最优解就是整数规划 (1) 的最大匹配。

上述将离散整数约束替换为连续实数约束的操作，其实是将可行域由匹配集合扩大成其凸包：

定理 1. 记匹配 $\mathcal{M}$ 对应的向量为 $\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M})}$，$\mathcal{P}(\mathcal{G})\triangleq\operatorname{conv}\{\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_1)},\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_2)},\ldots\}$，$\mathcal{Q}(\mathcal{G})$ 定义为：

$$\mathcal{Q}(\mathcal{G})=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\ge\mathbf{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x}\le\mathbf{1}\}=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{E}|}\mid\forall v\in\mathcal{V},\ \sum_{e\in\delta(v)}x_e\le 1\right\}$$

那么 $\mathcal{P}(\mathcal{G})=\mathcal{Q}(\mathcal{G})$。

证明. 正向比较简单，对任意 $\boldsymbol{x}=\sum_{i\in[n]}\alpha^{(\mathcal{M}_i)}\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_i)}\in\mathcal{P}(\mathcal{G})$，非负性是显然的，又

$$\forall v\in\mathcal{V},\ \sum_{e\in\delta(v)}x_e=\sum_{e\in\delta(v)}\sum_{i\in[n]}\alpha^{(\mathcal{M}_i)}x_e^{(\mathcal{M}_i)}=\sum_{i\in[n]}\alpha^{(\mathcal{M}_i)}\overbrace{\sum_{e\in\delta(v)}x_e^{(\mathcal{M}_i)}}^{\leq 1}\leq\sum_{i\in[n]}\alpha^{(\mathcal{M}_i)}=1$$

因此 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{Q}(\mathcal{G})$。

反向较为麻烦，对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{Q}(\mathcal{G})$，记 $\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})=\{e\in\mathcal{E}\mid x_e>0\}$。下面对 $|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})|$ 进行归纳，若 $|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})|=0$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，对应零匹配；若 $|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})|=1$，即存在唯一的边 e 使得 $0<x_e\leq 1$，其余分量均为零，显然这样的 $\boldsymbol{x}$ 可以表示成零匹配和单边匹配的凸组合。若 $|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})|\geq 2$，分两种情况讨论：

- $\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})$ 不是匹配，则 $\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})$ 包含长度 ≥ 2 的路径，不妨就设为 $v_1\xrightarrow{e_1}v_2\xrightarrow{e_2}v_3$，由于 $x_{e_1},x_{e_2}>0$，故 $x_{e_1},x_{e_2}<1$，否则 $\sum_{e\in\delta(v_2)}x_e=x_{e_1}+x_{e_2}>1$。记 $\boldsymbol{x}=[x_{e_1};x_{e_2};\tilde{\boldsymbol{x}}]$、$\boldsymbol{d}=[1;-1;\boldsymbol{0}]$，易知

$$\boldsymbol{x}-x_{e_1}\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}x_{e_1}\\x_{e_2}\\\tilde{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix}-x_{e_1}\begin{bmatrix}1\\-1\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\x_{e_1}+x_{e_2}\\\tilde{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix}\triangleq\boldsymbol{x}_2,\quad \boldsymbol{x}+x_{e_2}\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}x_{e_1}\\x_{e_2}\\\tilde{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix}+x_{e_2}\begin{bmatrix}1\\-1\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{e_1}+x_{e_2}\\0\\\tilde{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix}\triangleq\boldsymbol{x}_1$$

  于是 $x_{e_1}x_{e_2}\boldsymbol{d}=x_{e_2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2)=x_{e_1}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x})$，从而

$$\boldsymbol{x}=\frac{x_{e_1}}{x_{e_1}+x_{e_2}}\boldsymbol{x}_1+\frac{x_{e_2}}{x_{e_1}+x_{e_2}}\boldsymbol{x}_2=\operatorname{conv}\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\}$$

  注意 $|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}_1)|=|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}_2)|=|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})|-1$，由归纳假设知 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{P}(\mathcal{G})$，于是 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}(\mathcal{G})$。
- $\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})$ 是匹配，不妨设 $\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})=\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n\}$ 且 $x_{e_1}\leq x_{e_2}\leq x_{e_3}\leq\cdots\leq x_{e_n}$，定义

$$\mathcal{M}_i\triangleq\{e_i,e_{i+1},\ldots,e_n\},\quad \boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_i)}=[\underbrace{0;\ldots;0}_{1:i-1};\underbrace{1;1;\ldots;1}_{i:n};\underbrace{0;\ldots;0}_{n+1:|\mathcal{E}|}],\quad i\in[n]$$

  则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_{e_1}\\x_{e_2}\\x_{e_3}\\\vdots\\x_{e_n}\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}x_{e_1}\\x_{e_1}\\x_{e_1}\\\vdots\\x_{e_1}\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\x_{e_2}-x_{e_1}\\x_{e_2}-x_{e_1}\\\vdots\\x_{e_2}-x_{e_1}\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\x_{e_3}-x_{e_2}\\\vdots\\x_{e_3}-x_{e_2}\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\cdots\\&=x_{e_1}\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_1)}+(x_{e_2}-x_{e_1})\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_2)}+(x_{e_3}-x_{e_2})\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_3)}\\&\quad+\cdots+(x_{e_n}-x_{e_{n-1}})\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_n)}+(1-x_{e_n})\boldsymbol{0}\in\mathcal{P}(\mathcal{G})\end{aligned}$$

♣

由定义 $\mathcal{P}(\mathcal{G})=\operatorname{conv}\{\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_1)},\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_2)},\ldots\}$ 知 $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ 的任意极点都是 $\mathcal{G}$ 的匹配，反过来结论也成立：

定理 2. $\mathcal{G}$ 的任意匹配都是 $\mathcal{P}$ 的极点。

证明. 对任意匹配 $\mathcal{M}$ 和非零向量 $\boldsymbol{d}$，不妨设 $d_e\neq 0$，注意 $x_e^{(\mathcal{M})}\in\{0,1\}$，因此 $x_e^{(\mathcal{M})}\pm\epsilon d_e$ 总有一个不属于 $[0,1]$，即 $\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M})}\pm\epsilon\boldsymbol{d}$ 总有一个不属于 $\mathcal{P}$，故 $\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M})}$ 是 $\mathcal{P}$ 的极点。 ♣

2 完美匹配

若匹配 $\mathcal{M}^\star$ 使得在子图 $(\mathcal{V},\mathcal{M}^\star)$ 中，所有点都有且仅有一条相连的边，则称为完美匹配 (perfect matching)。完美匹配可表示为向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_+^{|\mathcal{E}|}$ 满足对任意 $v\in\mathcal{V}$ 有 $\sum_{e\in\delta(v)}x_e=1$，显然完美匹配是匹配的真子集。

定理 3. 设 $\mathcal{P}^\star(\mathcal{G})$ 为 $\mathcal{G}$ 的所有完美匹配构成的凸包，$\mathcal{Q}^\star(\mathcal{G})$ 定义为：

$$\mathcal{Q}^\star(\mathcal{G})=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{1}\}=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{E}|}\mid\forall v\in\mathcal{V},\sum_{e\in\delta(v)}x_e=1\right\}$$

则 $\mathcal{P}^\star(\mathcal{G})=\mathcal{Q}^\star(\mathcal{G})$。

证明. 一方面，对任意 $\boldsymbol{x}=\sum_{i\in[n]}\alpha^{(\mathcal{M}_i^\star)}\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_i^\star)}\in\mathcal{P}^\star(\mathcal{G})$，易知

$$\forall v\in\mathcal{V},\sum_{e\in\delta(v)}x_e=\sum_{e\in\delta(v)}\sum_{i\in[n]}\alpha^{(\mathcal{M}_i^\star)}x_e^{(\mathcal{M}_i^\star)}=\sum_{i\in[n]}\alpha^{(\mathcal{M}_i^\star)}\sum_{e\in\delta(v)}x_e^{(\mathcal{M}_i^\star)}=\sum_{i\in[n]}\alpha^{(\mathcal{M}_i^\star)}=1$$

因此 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{Q}^\star(\mathcal{G})$。

另一方面，对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{Q}^\star(\mathcal{G})\subseteq\mathcal{Q}(\mathcal{G})=\mathcal{P}(\mathcal{G})$，设 $\boldsymbol{x}=\sum_{i\in[n]}\alpha^{(\mathcal{M}_i)}\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_i)}$。用反证法，若其凸组合表示中存在不完美匹配 $\mathcal{M}_j$，设 v 不是 $\mathcal{M}_j$ 中边的顶点，则

$$\sum_{e\in\delta(v)}x_e=\sum_{e\in\delta(v)}\sum_{i\in[n]\setminus\{j\}}\alpha^{(\mathcal{M}_i)}x_e^{(\mathcal{M}_i)}=\sum_{i\in[n]\setminus\{j\}}\alpha^{(\mathcal{M}_i)}\sum_{e\in\delta(v)}x_e^{(\mathcal{M}_i)}\leq\sum_{i\in[n]\setminus\{j\}}\alpha^{(\mathcal{M}_i)}<1$$

这和 $\mathcal{Q}^\star(\mathcal{G})$ 的定义矛盾，故 $\boldsymbol{x}$ 的凸组合表示中不存在不完美匹配，即 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}^\star(\mathcal{G})$。 ♣

定理 4. $\mathcal{G}$ 的任意完美匹配都是 $\mathcal{P}^\star$ 的极点。

证明. 完美匹配也是匹配，因此是 $\mathcal{P}$ 的极点，故无法由 $\mathcal{P}$ 中其它点的凸组合表示，又 $\mathcal{P}^\star\subseteq\mathcal{P}$，因此也无法由 $\mathcal{P}^\star$ 中其它点的凸组合表示，从而也是 $\mathcal{P}^\star$ 的极点 ♣

对于完全二部图 $\mathcal{K}_{n,n}$ 有 $|\mathcal{E}|=n^2$，对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{Q}^\star(\mathcal{K}_{n,n})$ 有

$$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_+^{n^2},\ \forall v\in\mathcal{V},\sum_{e\in\delta(v)}x_e=1$$

又每个点恰有 n 条相连的边，因此 $\boldsymbol{x}$ 也可以写成一个 $n\times n$ 的双随机矩阵 (所有行和、列和均为 1)。另一方面，对于完美匹配 $\mathcal{M}$，每个点有且仅有一条相连的边，其对应的 $\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M})}$ 可以写成置换矩阵 (每行、每列有且仅有一个 1，其余为零)，由定理4知双随机矩阵集合的极点是置换矩阵，这就是 Birkhoff-von Neumann 定理。

3 König 定理

前文已述最大匹配问题可放松成线性规划

$$\max_{\boldsymbol{x}}\ \{\mathbf{1}^\top\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x}\leq\mathbf{1}\}$$

引入 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{E}|}$、$\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|}$，对偶函数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\mathbf{1}^\top\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}^\top(\mathbf{A}\boldsymbol{x}-\mathbf{1})$，易知

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x}}=\mathbf{1}+\boldsymbol{y}-\mathbf{A}^\top\boldsymbol{z}=\mathbf{0}\Longrightarrow\mathbf{A}^\top\boldsymbol{z}-\mathbf{1}=\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}$$

故对偶问题为线性规划

$$\min_{\boldsymbol{z}}\ \{\mathbf{1}^\top\boldsymbol{z}:\boldsymbol{z}\geq\mathbf{0},\ \mathbf{A}^\top\boldsymbol{z}\geq\mathbf{1}\}\tag{3}$$

显然这是将最小点覆盖问题

$$\min_{\boldsymbol{z}}\ \{\mathbf{1}^\top\boldsymbol{z}:\boldsymbol{z}\in\mathbb{Z}_+^{|\mathcal{V}|},\ \mathbf{A}^\top\boldsymbol{z}\geq\mathbf{1}\}\tag{4}$$

的离散集合 $\mathbb{Z}_+^{|\mathcal{V}|}$ 放松成连续集合 $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{E}|}$ 得到的线性规划。同理由 $\{\boldsymbol{z}\geq\mathbf{0},\ \mathbf{A}^\top\boldsymbol{z}\geq\mathbf{1}\}\Longleftrightarrow[-\mathbf{A}^\top;-\mathbf{I}]\boldsymbol{z}\leq[-\mathbf{1};\mathbf{0}]$ 以及 $\mathbf{A}$ 是全幺模矩阵知凸多面体 $\{\boldsymbol{z}\mid\boldsymbol{z}\geq\mathbf{0},\ \mathbf{A}^\top\boldsymbol{z}\geq\mathbf{1}\}$ 的极点是整数向量。由于线性规划必然在极点处取最优，因此线性规划 (3) 的最优解就是整数规划 (4) 的最小点覆盖。

综上，最大匹配、最小点覆盖这两类整数规划问题，其最优解就是将整数约束放松后导出的线性规划的最优解，且这两类相应的线性规划互为对偶问题。

定理 5 (König)**.** 对于二部图 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$，设最大匹配问题的最优值为 $\text{max-matching}(\mathcal{G})$，最小点覆盖问题的最优值为 $\text{min-vertex-cover}(\mathcal{G})$，则有 $\text{max-matching}(\mathcal{G})=\text{min-vertex-cover}(\mathcal{G})$。

证明. $\text{min-vertex-cover}(\mathcal{G})\geq\text{max-matching}(\mathcal{G})$ 是显然的，因为对最大匹配中的任意一条边，至少要覆盖其中一个顶点。

下面证明另一个方向，若 $\mathcal{E}=\emptyset$，则 $\text{max-matching}(\mathcal{G})=\text{min-vertex-cover}(\mathcal{G})=0$，故不妨设 $\mathcal{E}$ 非空。对 $|\mathcal{V}|$ 进行归纳，若 $|\mathcal{V}|=2$，易知 $\text{max-matching}(\mathcal{G})=\text{min-vertex-cover}(\mathcal{G})=1$。若 $|\mathcal{V}|>2$，设 $\boldsymbol{z}^\star$ 是最小点覆盖问题的最优解，由于存在点 v 使得 $z_v^\star>0$，故根据互补松弛条件可得

$$z_v^\star\left(\sum_{e\in\mathcal{E}}a_{v,e}x_e^\star-1\right)=0\Longrightarrow 1=\sum_{e\in\mathcal{E}}a_{v,e}x_e^\star=\sum_{e\in\delta(v)}x_e^\star$$

注意 $\boldsymbol{x}^\star$ 是最大匹配，故 v 出现在所有的最大匹配中，记 $\tilde{\mathcal{G}}$ 为 $\mathcal{G}$ 删除点 v 及其相连边后得到的图，于是

$$\text{max-matching}(\tilde{\mathcal{G}})=\text{max-matching}(\mathcal{G})-1$$

由归纳假设知 $\text{max-matching}(\tilde{\mathcal{G}})=\text{min-vertex-cover}(\tilde{\mathcal{G}})$，于是

$$\begin{aligned}\text{min-vertex-cover}(\mathcal{G})&\leq\text{min-vertex-cover}(\tilde{\mathcal{G}})+1\\&=\text{max-matching}(\tilde{\mathcal{G}})+1\\&=\text{max-matching}(\mathcal{G})\end{aligned}$$

♣

König 定理还可进一步推广，设 b-匹配对应的向量满足对任意点 v 有 $\sum_{e\in\delta(v)}x_e\leq b_v$；$c$-点覆盖对应的向量满足对任意边 $e=(u,v)$ 有 $z_u+z_v\geq c_e$，易知有

$$\max_{\boldsymbol{x}}\ \{\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}\}=\min_{\boldsymbol{z}}\ \{\boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{z}:\boldsymbol{z}\geq\mathbf{0},\ \mathbf{A}^\top\boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{c}\}$$

即最大 c-加权 b-匹配等于最小 b-加权 c-点覆盖。

4 最大流与最小割

类似于最大匹配和最小点覆盖，最大流和最小割也是一组对偶问题。给定有向流网络 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$、源点 s、汇点 t，设 $\delta_{\text{in}}(v)/\delta_{\text{out}}(v)$ 是以点 v 为终点/起点的入边/出边集合，$\mathbf{A}=[a_{v,e}]\in\{0,\pm1\}^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{E}|}$ 是 $\mathcal{G}$ 对应的关联矩阵，即

$$a_{v,e}=\begin{cases}1 & e\in\delta_{\text{in}}(v)\\ -1 & e\in\delta_{\text{out}}(v)\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

$\tilde{\mathbf{A}}$ 为 $\mathbf{A}$ 去掉 s、t 对应行的子矩阵，注意有向流网络中源点 s 只有出边、汇点 t 只有入边，因此 $\tilde{\mathbf{A}}$ 其实也是 $\mathcal{G}$ 删除 s、t 及其所有相连边后的有向图的关联矩阵，故 $\tilde{\mathbf{A}}$ 是全幺模矩阵。

最大流问题可形式化为线性规划：

$$\max_{\boldsymbol{x}}\ \{\boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{x}:\mathbf{0}\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{c},\ \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}$$

其中 $\boldsymbol{a}^\top$ 是 $\mathbf{A}$ 中汇点 t 对应的行，$\mathbf{0}\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{c}$ 约束流的上下界，$\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 约束非源点、汇点的流量要守恒。注意

$$\{\boldsymbol{x}\mid\mathbf{0}\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{c},\ \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}\Longleftrightarrow[\tilde{\mathbf{A}};-\tilde{\mathbf{A}};\mathbf{I};-\mathbf{I}]\boldsymbol{x}\le[\mathbf{0};\mathbf{0};\boldsymbol{c};\mathbf{0}]$$

由 $\tilde{\mathbf{A}}$ 是全幺模矩阵知 $[\tilde{\mathbf{A}};-\tilde{\mathbf{A}};\mathbf{I};-\mathbf{I}]$ 也是全幺模矩阵，若流量上限 $\boldsymbol{c}$ 是整数向量，则可行域 $\{\boldsymbol{z}\mid\mathbf{0}\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{c},\ \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}$ 的极点也是整数向量，即最大流是整数流。

引入 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{E}|}$、$\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{E}|}$、$\tilde{\boldsymbol{w}}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|-2}$，对偶函数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{w}})=\boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})-\tilde{\boldsymbol{w}}^\top\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{x}$，易知

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}-\tilde{\mathbf{A}}^\top\tilde{\boldsymbol{w}}=\mathbf{0}\Longrightarrow\tilde{\mathbf{A}}^\top\tilde{\boldsymbol{w}}+\boldsymbol{z}\ge\boldsymbol{a}$$

故对偶问题为

$$\min_{\tilde{\boldsymbol{w}},\boldsymbol{z}}\ \{\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{z}:\boldsymbol{z}\ge\mathbf{0},\ \tilde{\mathbf{A}}^\top\tilde{\boldsymbol{w}}+\boldsymbol{z}\ge\boldsymbol{a}\}$$

注意

$$\{\boldsymbol{z}\mid\boldsymbol{z}\ge\mathbf{0},\ \tilde{\mathbf{A}}^\top\tilde{\boldsymbol{w}}+\boldsymbol{z}\ge\boldsymbol{a}\}\Longleftrightarrow[-\tilde{\mathbf{A}}^\top,-\mathbf{I};\mathbf{0},-\mathbf{I}][\tilde{\boldsymbol{w}};\boldsymbol{z}]\le[-\boldsymbol{a};\mathbf{0}]$$

由 $\tilde{\mathbf{A}}$ 是全幺模矩阵知 $[-\tilde{\mathbf{A}}^\top,-\mathbf{I};\mathbf{0},-\mathbf{I}]$ 也是全幺模矩阵，故对偶问题的最优解 $\tilde{\boldsymbol{w}}^\star$、$\boldsymbol{z}^\star$ 也是整数向量。

注意 $\tilde{\boldsymbol{w}}^\star$ 的维度为 $|\mathcal{V}|-2$，与 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的行对应，现添加 $w_s^\star=0$、$w_t^\star=-1$ 将其扩充为 $\boldsymbol{w}^\star$，与 $\mathbf{A}$ 的行对应，于是 $\mathbf{A}^\top\boldsymbol{w}^\star+\boldsymbol{z}^\star=\tilde{\mathbf{A}}^\top\tilde{\boldsymbol{w}}^\star-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{z}^\star\ge\mathbf{0}$，从而 $\boldsymbol{z}^\star=\max\{\mathbf{0},-\mathbf{A}^\top\boldsymbol{w}^\star\}$，即对任意边 $e=(u,v)$ 有 $z_e^\star=\max\{0,w_u^\star-w_v^\star\}$。

定义 $\mathcal{S}=\{v\in\mathcal{V}\mid w_v^\star\ge0\}$，$\overline{\mathcal{S}}=\mathcal{V}\setminus\mathcal{S}$，显然 $s\in\mathcal{S}$、$t\in\overline{\mathcal{S}}$，将边分为四类：

- $\delta(\mathcal{S})\triangleq\{(u,v)\in\mathcal{E}\mid u\in\mathcal{S},\ v\in\mathcal{S}\}$ 为所有起点、终点均属于 $\mathcal{S}$ 的边的集合；
- $\delta(\overline{\mathcal{S}})\triangleq\{(u,v)\in\mathcal{E}\mid u\in\overline{\mathcal{S}},\ v\in\overline{\mathcal{S}}\}$ 为所有起点、终点均属于 $\overline{\mathcal{S}}$ 的边的集合；

- $\delta_{\text{out}}(\mathcal{S}) \triangleq \{(u,v) \in \mathcal{E} \mid u \in \mathcal{S},\ v \in \overline{\mathcal{S}}\}$ 为所有起点属于 $\mathcal{S}$、终点属于 $\overline{\mathcal{S}}$ 的边的集合；
- $\delta_{\text{in}}(\mathcal{S}) \triangleq \{(u,v) \in \mathcal{E} \mid u \in \overline{\mathcal{S}},\ v \in \mathcal{S}\}$ 为所有起点属于 $\overline{\mathcal{S}}$、终点属于 $\mathcal{S}$ 的边的集合；

注意在将所有 $\delta_{\text{out}}(\mathcal{S})$ 中的边删除后，s、t 不再连通，因此 $\delta_{\text{out}}(\mathcal{S})$ 称为割 (cut)。

由于 $w_v^\star$ 都是整数，因此对任意边 $e=(u,v) \in \delta_{\text{out}}(\mathcal{S})$ 有 $z_e^\star \geq w_u^\star - w_v^\star \geq 1$，于是

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z}^\star \geq \sum_{e \in \delta_{\text{out}}(\mathcal{S})} c_e z_e^\star \geq \sum_{e \in \delta_{\text{out}}(\mathcal{S})} c_e \geq \sum_{e \in \delta_{\text{out}}(\mathcal{S})} x_e^\star \geq \sum_{e \in \delta_{\text{in}}(t)} x_e^\star = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}^\star$$

其中第一个不等号是因为 $z_e^\star \geq 0$；第二个不等号是因为对任意边 $e \in \delta_{\text{out}}(\mathcal{S})$ 有 $z_e^\star \geq 1$；第三个不等号是因为 c_e 是边 e 的流量上限；第四个不等号是因为 $\delta_{\text{out}}(\mathcal{S})$ 上的流量未必会全部进入汇点，可能会有一部分通过 $\delta_{\text{in}}(\mathcal{S})$ 再折回 $\mathcal{S}$。

根据强对偶定理所有的不等号都取等号，由此可以得到一些有趣的结论：

- 根据第一个不等号取等号，对任意边 $e \notin \delta_{\text{out}}(\mathcal{S})$ 有 $z_e^\star = 0$，即对任意 $\delta(\mathcal{S})$、$\delta(\overline{\mathcal{S}})$、$\delta_{\text{in}}(\mathcal{S})$ 中的边 e，都有 $z_e^\star = 0$；
- 根据第二个不等号取等号，对任意边 $e=(u,v) \in \delta_{\text{out}}(\mathcal{S})$ 有 $z_e^\star = 1$，故只可能是 $w_u^\star = 0$、$w_v^\star = -1$，于是对任意边 $e=(p,u) \in \delta(\mathcal{S})$，必然有 $w_p^\star = 0$，否则 $z_e^\star \geq w_p^\star - w_u^\star > 0$，与前一个结论矛盾，依此类推，对所有 $\mathcal{S}$ 中的点 u 都有 $w_u^\star = 0$。同理，对所有 $\overline{\mathcal{S}}$ 中的点 v 都有 $w_v^\star = -1$；
- 根据第三个不等号取等号，当流量达到最大时，$\delta_{\text{out}}(\mathcal{S})$ 中每条边的流量都达到上限，这个也可由互补松弛条件 $z_e(x_e - c_e) = 0$ 得到：$z_e^\star = 1 > 0 \Longrightarrow x_e^\star = c_e$；
- 根据第四个不等号取等号，$\delta_{\text{out}}(\mathcal{S})$ 上的流量全部进入 t，不折回 $\mathcal{S}$，即 $\delta_{\text{in}}(\mathcal{S})$ 上的流量为零，这个也可由互补松弛条件 $y_e x_e = 0$ 得到：$z_e^\star = 0 > -1 = w_u^\star - w_v^\star$，故 $y_e^\star = z_e^\star - (w_u^\star - w_v^\star) > 0$，从而 $x_e^\star = 0$。